# Berechnung von Polynomnullstellen mittels Clipping

Kurzfassung zum Pratikum Numerische Mathematik WS 2011/12

Timo Bingmann

Schnelle Berechnungsverfahren für Nullstellen von Polynomen werden in vielen Anwendungen als Basistechnik benötigt. Klassische Algorithmen hierfür sind beispielsweise Bisektion und das Newton-Raphson Verfahren, wobei letzteres bei einfachen Nullstellen quadratische Konvergenz, bei doppelten aber nur lineare Konvergenzgeschwindigkeit erreicht. In 2007 haben Bartoň und Jüttler ein neues Verfahren vorgestellt, das auf Gradreduktion basiert und alle Nullstellen eines Polynoms innerhalb eines vorgegeben Suchintervalls findet. Auch dieses basiert auf sukzessive kleiner werdenden Intervallen und erreicht eine Konvergenzgeschwindigkeit von 3 bei einfachen und $\frac{3}{2}$ bei zweifachen Nullstellen. Das Schema wurde 2009 von Liu et al. fortgesetzt und diese Erweiterung liefert Konvergenzgeschwindigkeiten von 4 bei einfachen, 2 bei doppelten Nullstellen und $\frac{4}{3}$ bei dreifachen Nullstellen.

Beide Verfahren basieren auf Approximation eines in Bernstein-Bézier-Darstellung gegebenen Polynoms $n$-ten Grades durch zwei Polynome von höchstens zweitem bzw. dritten Grad, die das ursprüngliche Polynom von oben und unten einschließen. Die Nullstellen dieser Polynome kleineren Grades lassen sich direkt mit der Mitternachtsformel oder den Cardanoschen Formeln berechnen und liefern die Intervallgrenzen der nächsten Suchzweige. Das Verfahren wird so lange iteriert bis eine gewünschte Intervallgröße erreicht ist und durch Verzweigung alle Nullstellen gefunden wurden.

Die Konvergenzgeschwindigkeit der Intervallschachtelung wird durch die bestmögliche Wahl der approximierenden Polynome sicher gestellt. Hierzu wird mit Hilfe eines von Jüttler entwickelten Verfahrens diejenigen quadratischen bzw. kubischen Polynome berechnet, die minimalen Abstand zum Zielpolynom bezüglich der $L_2$ bzw. $L_\infty$ Normen haben. Das Gradreduktions-Verfahren basiert auf der dualen Basis der Bernstein-Polynome und erlaubt es die Koeffizienten einer Bestapproximation durch einfache Matrixmultiplikation zu berechnen.