

# Algebra 2 Übersicht

## 1 Multilineare Algebra

### 1.1 Moduln

$R$ -Modul Grunddefinitionen und Beispiele

$R$ -Modul Grundeigenschaften

Def: freier Modul

Projektive Moduln

Beweis: Sequenz projektiver Moduln

Beweis: Sequenz injektiver Moduln

Beispiele für nicht projektive / injektive Moduln

Beweis: Freie Moduln sind projektiv. Jeder  $R$ -Modul ist Faktormodul ...

Prop+Beweis: proj. Modul  $\Leftrightarrow F = N \oplus N'$  frei

### 1.2 Tensorprodukt

Tensorprodukt: Definition und Beispiele

Satz 1: Tensorprodukt

Tensorprodukt-Äquivalenzen und Beweis

Tensorprodukt mit Idealen

### 1.3 Flache Moduln

Funktor  $\otimes_R N$  mit Beispiel

Flacher Modul und 3 Bemerkungen

Projektive Moduln sind flach (drei-teiliger Beweis)

### 1.4 Tensoralgebra

Def: Algebra, 2 Funktoren, Beispiele

UAE von  $R' \otimes_R R''$

Def: Tensoralgebra

### 1.5 Symmetrische und äußere Algebra

Def: symmetrische und alternierende Abbildungen

Satz 2: symmetrische und äußere Potenz

Satz: Struktur von  $S^n(M)$  und  $\Lambda^n(M)$

### 1.6 Differentiale

Def: Derivation mit Beispielen

Darstellbarkeit von  $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$

2 Beispiele:  $\Omega_{R[X_1, \dots, X_n]/R}$   $\Omega_{\mathcal{C}^\infty(X)/R}$

$\Omega_{./R}$  ist rechtsexakter Funktor

### 1.7 Der de Rham-Komplex

Def+Satz: de Rham-Komplex

2 Beispiele zu  $H_{dR}^i(A)$

## 2 Noethersche Ringe und Moduln

### 2.1 Der Hilbertsche Basissatz

Def+Bsp: noethersch

Satz+Bew:  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  noethersch Äquivalenz

Satz: Endlich erzeugbare Moduln über noetherschen Ringen

Drei Äquivalenzen zu noethersch

Satz: Hilbertsche Basissatz + zwei Folgerungen

### 2.2 Ganze Ringerweiterungen

Def: ganz, normiert, ganzer Abschluss, ganz abgeschlossen, normal; Satz zu normal

Äquivalenzen zu ganz

### 2.3 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Satz 5: Hilbertsche Nullstellensatz

Def+Bsp: Verschwindungsideal, Nullstellenmenge + 2 Beispiele

Satz: Schwacher Nullstellensatz

Satz: Starker Nullstellensatz

## 2.4 Graduierte Ringe und Moduln

Def: graduiertes Ring, homogen; 1 Bemerkung

Def: homogenes Ideal; 2 Bemerkungen

3 Beispiele zu homogenen Idealen

Drei Äquivalenzen für noethersche graduierte Ringe

Def: graduiertes  $S$ -Modul, graderhaltend,  $\text{Grad}(\varphi)$ , Twist

Satz:  $\dim S_d^{(n)} = \dots$  in  $S = K[X_1, \dots, X_n]$

Satz: Hilbert-Polynom

Def: Hilbert-Reihe mit 3 Beispielen

Satz 6': Hilbert-Reihe

## 2.5 Invarianten endlicher Gruppen

Def: Invariantenring, linear; 2 Beispiele

Satz: Endliche Erzeugbarkeit des Invariantenrings

Beispiel eines Invariantenrings

## 2.6 Nakayama, Krull und Artin-Rees

Def+Bem+Bsp: Jacobson Radikal

Satz: Lemma von Nakayama + Folgerungen und Beispiel

Proposition: Artin-Rees

Satz 9: Durchschnittssatz von Krull

Beispiele zu Artin-Rees

## 2.7 Krull-Dimension

Def+Bsp: Krull-Dimension

Bem: Krull-Dimension von nullteilerfreien Ringen

Satz 10: Primidealketten in Ringerweiterungen

Folgerung über Maximalität von Primidealen in Ringerweiterungen

Satz 11: Noether-Normalisierung

## 2.8 Das Spektrum eines Rings

Def+Bsp+Bem: Spektrum eines Rings

3 Bem zu Spektrum, Zariski-Topologie

Def: irreduzibel, Prop dazu mit Primideal

Folg: mit hausdorffsch, Def Verschwindungsideal + Folgerung

Def+Bem: Irreduzible Komponente

Prop: Spec als Funktor: Auswirkungen eines Ringhomomorphismus

## 2.9 Diskrete Bewertungsringe

Def: diskrete Bewertung + Beispiele

Def: Absolutbetrag und Geometrie: Kreis und Dreieck

Def+Bem:  $\mathbb{Q}_p$  und  $\mathcal{O}_v$  lokaler Ring

Def+Prop: Diskreter Bewertungsring

Satz 12: Diskrete Bewertungsringe + 1 Gegenbeispiel

## 2.10 Dedekindringe

Def: Dedekindring + 4 Beispiele

Def: gebrochenes Ideal, invertierbares Ideal, 5 Beispiele, 1 Bemerkung

Satz 13: Dedekindringe

Satz 14: Dedekindring und  $L/K$  Körpererweiterung

## 2.11 Primärzerlegung

Def+Bem+Bsp: Primärideal

Def:  $\mathfrak{p}$ -primär Primärzerlegung, reduzierte

Satz 15: Reduzierte Primärzerlegung